

Structures algébriques, calcul matriciel, fonctions

Durée : **2h**. Calculatrices non autorisées. La clarté de la copie fera varier la note de ± 1 point.

Les questions simples doivent être traitées rapidement, ne perdez pas de temps au brouillon !

1 Calcul d'une puissance n -ième de matrice

Dans cet exercice, on notera $0_{3,3}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) On pose $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\tilde{P}P$. En déduire que P est inversible et préciser P^{-1} .
- 2) Calculer $P^{-1}JP$.
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer J^n en fonction de n et de J . On pourra éventuellement utiliser la question précédente.
- 4) Calculer N^2 .
- 5) Exprimer A en fonction de N et J .
- 6) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer A^n en fonction de n .
- 7) **Bonus un peu corsé** : Existe-t-il une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}NQ$ soit diagonale ?

2 Une généralisation d'un théorème classique

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Soit $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$.

- 1) Soit $p, q, r \in \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I \quad g(x) = f(x) - p(x-b)(x-c) - q(x-a)(x-c) - r(x-a)(x-b)$$

Déterminer les réels p, q, r de sorte que g s'annule en a, b et c . Dans la suite, p, q, r gardent ces valeurs.

- 2) En déduire qu'il existe $\alpha, \beta \in]a, c[$ avec $\alpha < \beta$ tels que $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$.
- 3) En déduire qu'il existe $\gamma \in I$ tel que :

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(\gamma)$$

On admet que cette propriété est encore vérifiée pour tous points $a, b, c \in I$ distincts, sans l'hypothèse $a < b < c$.

- 4) Soit $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{\sin x}{x}$. Montrer que h se prolonge par continuité en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, qu'on notera encore h .
- 5) En appliquant la question 3) à $f = \sin$ et $c = 0$, montrer que h est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.

Tournez la page pour la suite du sujet

3 Idéal d'un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. On note 0 l'élément neutre de A pour l'addition, et 1 l'élément neutre de A pour la multiplication.

Soit $I \subset A$. On dit que I est un *idéal* de A si :

$$I \text{ est un sous-groupe de } (A, +) \quad \text{et} \quad \forall a \in A \quad \forall x \in I \quad a \times x \in I$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
- 2) On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble défini par $\mathbb{Z}[i] = \left\{ n + ip \mid (n, p) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$, où i est le nombre complexe usuel.
 - a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif.
 - b) Soit J un idéal de $\mathbb{Z}[i]$. On suppose que $1 \in J$ et $i \in J$. Déterminer J .
- 3) Donner un exemple de deux idéaux d'un anneau dont la réunion n'est pas un idéal.
- 4) Soit $x \in A$. On note $xA = \left\{ xa \mid a \in A \right\}$. On admet que xA est un idéal de A : la preuve est similaire à celle de la question 1).
 - a) Reconnaître les ensembles $0A$ et $1A$.
 - b) Montrer que si A n'est pas un corps et si $A \neq \{0\}$, alors il existe un idéal I de A non trivial, c'est-à-dire tel que $I \neq \{0\}$ et $I \neq A$.

Indication : on pourra s'intéresser, en justifiant son existence, à un élément non nul et non inversible de A .
- 5) Supposons désormais que A soit un corps. Soit I un idéal de A .
 - a) Montrer que si $I \neq \{0\}$ alors $1 \in I$.
 - b) En déduire tous les idéaux du corps A .
- 6) Soit I un idéal de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I = n\mathbb{Z}$.

Blague : Quel est le second prénom de Benoit B. Mandelbrot ? Réponse : Benoit B. Mandelbrot.